Réponse au défi numéro 14 de *Performance Calcul*

Vincent Lefèvre

24, rue Louis Blanc
31400 Toulouse

e-mail: `Vincent.Lefevre@ens-lyon.fr`
WWW: `http://www.ens-lyon.fr/~vlefevre/`

Numéro Performance Calcul: 300136

27 avril 1996

Pour $n \geqslant 1$, soit $G(n)$ le n^{e} terme de la suite de Golomb. On va considérer les valeurs de n pour lesquelles $G(n+1) \neq G(n)$; elles sont intéressantes car elles déterminent des intervalles dans lesquels G est constante, et il suffit de savoir dans quel intervalle le nombre n donné est situé. Pour $k \geqslant 0$, on définit l'entier

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} G(i).$$

D'après la définition de la suite, on a : $\quad G(n) = k \iff S(k-1) < n \leqslant S(k).$

Cherchons maintenant à calculer $S(k)$ rapidement, k étant très grand. Dans la somme, on regroupe les $G(i)$ qui sont égaux à un même nombre j. On pose $k = S(\ell - 1) + p$, où $\ell = G(k)$. On a alors :

$$S(k) = \sum_{j=1}^{\ell-1} G(j).j + pk.$$

On va donc calculer les $G(\ell)$ et les $S(S(\ell))$, en commençant par $\ell = 1$, et en incrémentant ℓ successivement, jusqu'à ce que $S(S(\ell)) \geqslant n$. On peut alors calculer :

$$G(n) = k = S(\ell) - \lfloor (S(S(\ell)) - n)/\ell \rfloor,$$

où $S(\ell)$ se calcule directement à partir de la définition, ℓ étant suffisamment petit par rapport à n.

En fait, on ne calculera par $S(S(\ell))$, mais on considèrera d'abord $S(S(1)) - n$, puis on ajoutera $G(\ell).\ell$ à chaque itération pour avoir $S(S(\ell)) - n$. Cela a 2 avantages : d'une part, c'est un peu plus rapide et cela prend un peu moins de mémoire ; d'autre part, cela évite les erreurs d'arrondi éventuelles de $S(S(\ell))$ quand n est proche de 10^{12}.

Programme pour HP48S/SX :

```
<< { 1 } 1 ROT -
  WHILE DUP 0 <
  REPEAT SWAP DUP DUP SIZE 3 DUPN GET GET - 1 + GET 1 +
         + LASTARG SWAP SIZE 1 + * ROT +
  END OVER SIZE / FLOOR SWAP LIST-> ->ARRY CNRM SWAP -
>>
```

127,5 octets – CRC : #948Eh

Au niveau du `WHILE`, le niveau 1 de la pile contient le nombre $S(S(\ell)) - n$, et le niveau 2 de la pile contient la liste des $G(j)$, pour j allant de 1 à ℓ. Le `WHILE` teste si $n > S(S(\ell))$. $G(\ell + 1)$ est calculé à partir de la formule

$$G(\ell + 1) = G(\ell - G(G(\ell)) + 1) + 1,$$

en utilisant la liste des $G(j)$ déjà calculés. (ℓ est suffisamment petit pour qu'on puisse utiliser cette formule sans perdre trop de temps.)

$G(140)$ est renvoyé au bout d'une seconde environ. $G(10\,000)$ est renvoyé au bout de 7,3 secondes environ.