

Retour sur l'algorithme de minoration de la distance d'un segment de droite à \mathbb{Z}^2

Vincent LEFÈVRE

Loria / INRIA Lorraine

Journées Arinews

25–26 mai 2004

Introduction / plan

Preuve actuelle de mon algorithme de minoration de la distance d'un segment de droite à \mathbb{Z}^2 : très difficile à lire (transformations de suites de quadruplets, décrivant les configurations successives, au fur et à mesure qu'on ajoute des points).

→ Tentative de présentation d'une preuve plus géométrique et intuitive, ainsi que d'une variante de l'algorithme.

→ Nouveaux timings (comparaisons avec la variante et avec SLZ).

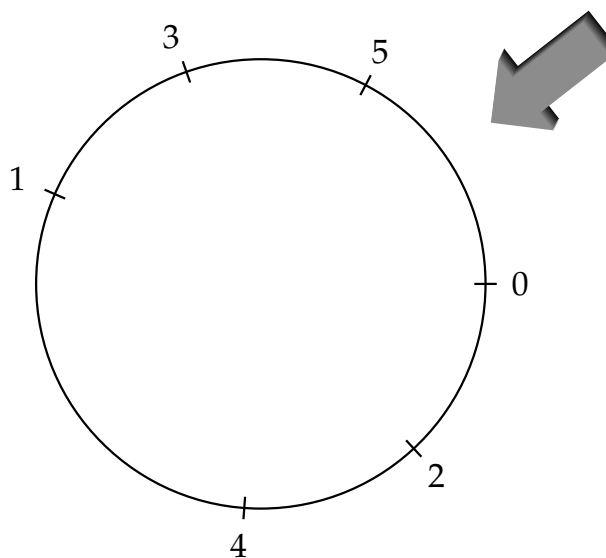
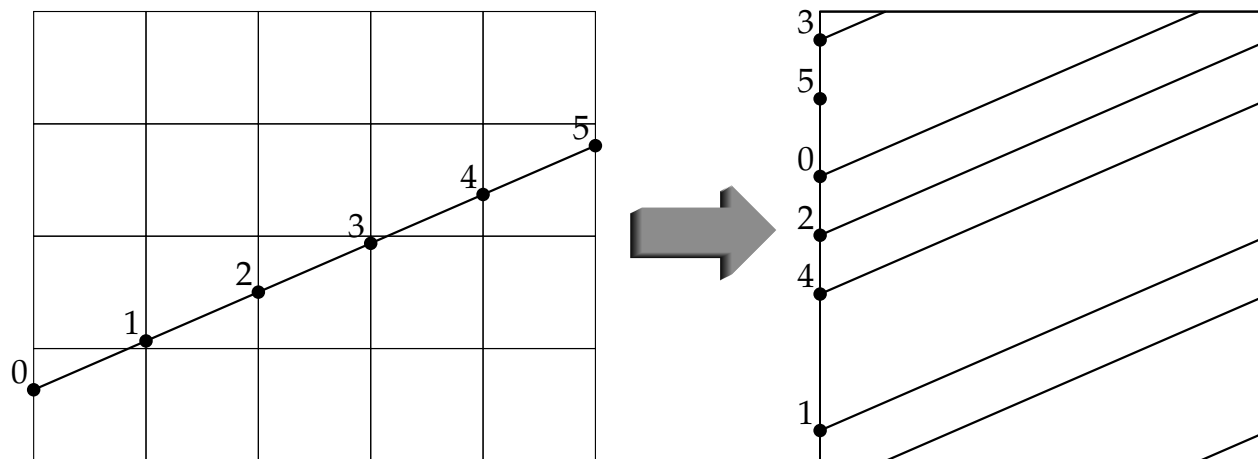
Rappel du problème

But: test exhaustif des fonctions élémentaires en précision fixée (e.g. double précision), i.e. « trouver les nombres machine x tels que $f(x)$ est très proche d'un nombre machine ».

Dans chaque intervalle :

- f approchée par un polynôme de degré 1 \rightarrow segment $y = b - ax$.
- Multiplication des coordonnées par des puissances de 2
 \rightarrow grille = \mathbb{Z}^2 .

On s'intéresse aux n tels que $\{b - n.a\} < d_0$, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire positive de x , a , b et d_0 sont des réels et $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$.



Si a est rationnel, en considérant les points successifs $0.a, 1.a, 2.a, \text{ etc.}$ (modulo 1), on retombera sur le point initial 0.

→ Cela complique l'analyse théorique.

→ On suppose donc a irrationnel, ou si on veut, un rationnel + un irrationnel arbitrairement petit.

Pour l'implémentation, a sera rationnel. → Faire attention au cas où on retombe sur le point initial (seul cas de discontinuité).

Notations / hypothèse de récurrence

- Intervalles x_0, x_1, \dots, x_{u-1} de longueur x , où x_0 est l'intervalle le plus à gauche et $x_r = x_0 + r.a$ (translation de $r.a$ modulo 1).
- Intervalles y_0, y_1, \dots, y_{v-1} de longueur y , où y_0 est l'intervalle le plus à droite et $y_r = y_0 + r.a$ (translation de $r.a$ modulo 1).
- Nombre total de points (ou d'intervalles) : $n = u + v$.

Les indices des intervalles sont appelés *rangs*. De même, le point $r.a$ (modulo 1) est appelé point de rang r .

Configuration initiale : $n = 2, u = v = 1$.

Passage d'une configuration à la suivante

- Puisque a est irrationnel, $n.a$ se trouve strictement entre 2 points de rangs inférieurs, dont l'un au moins, noté r , est non nul.
- Les points de rangs $r - 1$ et $n - 1$ (obtenus par translation) sont donc adjacents, et leur distance est soit x , soit y . Il y a la même distance entre les points r et n .
- Le point de rang n coupe donc un intervalle de longueur $h = \max(x, y)$ en deux intervalles de longueurs respectives $\ell = \min(x, y)$ et $h - \ell$.
- La longueur $h - \ell$ est nouvelle, et l'intervalle correspondant n'a donc pas d'antécédent (correspondant à l'ajout de $-a$).
- Cet intervalle a donc 0 comme point frontière.

→ Le point de rang n est donc complètement déterminé.

Les autres intervalles de longueur h vont être coupés de la même manière, successivement par ordre de rangs croissants (translations de a).

Rangs des intervalles de longueur $h - \ell$: ce sont simplement les rangs des intervalles de longueur h correspondants.

Rangs des intervalles de longueur ℓ : supposons que $\ell = x$ (même raisonnement pour $\ell = y$) ; le premier intervalle de longueur x est obtenu par translation d'un ancien intervalle de longueur x (cf transparent précédent), forcément x_{u-1} (le dernier) car l'image de x_{i-1} est x_i pour tout $i < u$. Cet intervalle est donc x_u et on a bien $x_u = x_0 + u.a$. Intervalles suivants : $x_{u+1}, x_{u+2}, \text{etc.}$

Algorithmes

Algorithme de base (1997) : renvoie un minorant de $\{b - n.a\}$ (en général, $\geq d_0$, ce qui permet de conclure immédiatement qu'il n'y a aucun point tel que $\{b - n.a\} < d_0$).

Variante (1998) : renvoie le rang $n < N$ du premier point tel que $\{b - n.a\} < d_0$, ou bien toute valeur $\geq N$ s'il n'y a pas de tel point.

Seule la position de b par rapport aux autres points nous intéresse.

→ Ne garder en mémoire que les informations nécessaires...

Informations en question :

- longueurs x et y , nombres d'intervalles u et v ;
- une valeur binaire indiquant si b se trouve dans un intervalle de longueur x ou dans un intervalle de longueur y ;
- le rang de cet intervalle (utile uniquement dans la variante) ;
- la distance de b à l'extrémité inférieure de l'intervalle.

Note :

- Le rang de l'extrémité inférieure d'un intervalle de longueur x est le rang de cet intervalle.
- Le rang de l'extrémité inférieure d'un intervalle de longueur y est $u +$ le rang de cet intervalle.

Algorithme (version soustractive)

Initialisation: $x = \{a\}$; $y = 1 - \{a\}$; $d = \{b\}$; $u = v = 1$; $r = 0$;

si ($d < d_0$) **retourner** 0

Boucle infinie:

si ($d < x$)

tant que ($x < y$)

si ($u + v \geq N$) **fin**

$y = y - x$; $u = u + v$;

si ($u + v \geq N$) **fin**

$x = x - y$;

si ($d \geq x$) $r = r + v$;

$v = v + u$;

sinon

$d = d - x$;

si ($d < d_0$) **retourner** $r + u$

tant que ($y < x$)

si ($u + v \geq N$) **fin**

$x = x - y$; $v = v + u$;

si ($u + v \geq N$) **fin**

$y = y - x$;

si ($d < x$) $r = r + u$;

$u = u + v$;

Timings

Notations pour les transparents suivants :

- Option $-c=k$: les soustractions sont remplacées par une division lorsque l'on doit faire au moins 2^k soustractions ($-$: algorithme soustractif uniquement).
- Option $-l=3$: redécoupage en $2^3 = 8$ sous-intervalles lorsque l'algorithme échoue (i.e. lorsque le minorant est trop petit).
- Option $-w$: variante de l'algorithme de minoration (remplace l'algorithme d'origine — ce n'est pas le meilleur choix !).

Chaque test est effectué 3 fois (sur marie.medicis.polytechnique.fr, AMD Opteron à 2 GHz), et on prend le temps médian.

Les résultats (pires cas potentiels) ont été comparés entre eux.

Fonctions exp et 2^x , exposant 0

| | exp x | | | 2^x | | |
|----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -c | — | -1=3 | -w | — | -1=3 | -w |
| 0 | 42.79 | 35.83 | 39.22 | 38.48 | 33.29 | 49.24 |
| 1 | 26.68 | 19.34 | 18.40 | 24.27 | 18.94 | 20.45 |
| 2 | 24.67 | 17.18 | 16.88 | 22.86 | 17.34 | 19.07 |
| 3 | 24.52 | 17.01 | 16.67 | 22.63 | 17.11 | 18.79 |
| 4 | 24.46 | 17.07 | 16.60 | 23.10 | 17.46 | 18.78 |
| 5 | 24.81 | 17.47 | 16.76 | 23.52 | 18.26 | 19.04 |
| — | 21.95 | 14.31 | 15.38 | 22.09 | 16.52 | 18.36 |

Fonctions sin et cos, exposant 0

| | sin x | | | cos x | | |
|----|---------|-------|-------|---------|-------|-------|
| -c | — | -1=3 | -w | — | -1=3 | -w |
| 0 | 40.67 | 32.09 | 42.88 | 39.43 | 33.89 | 36.04 |
| 1 | 28.61 | 19.77 | 19.58 | 26.28 | 20.50 | 19.61 |
| 2 | 27.01 | 17.96 | 18.07 | 23.75 | 18.01 | 17.87 |
| 3 | 26.73 | 17.75 | 17.72 | 23.23 | 17.10 | 17.11 |
| 4 | 27.21 | 18.34 | 17.50 | 23.29 | 17.16 | 17.03 |
| 5 | 27.56 | 18.58 | 17.55 | 23.26 | 17.49 | 17.24 |
| — | 24.11 | 14.96 | 16.11 | 20.23 | 14.19 | 15.20 |

Fonctions exp et 2^x , exposant –6

| | exp x | | | 2^x | | |
|----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| –c | – | –1=3 | –w | – | –1=3 | –w |
| 0 | 18.69 | 18.26 | 59.08 | 21.75 | 21.38 | 81.95 |
| 1 | 12.77 | 12.59 | 18.05 | 13.51 | 13.23 | 22.15 |
| 2 | 12.57 | 12.18 | 17.18 | 13.34 | 12.98 | 21.14 |
| 3 | 12.20 | 12.01 | 17.07 | 13.34 | 12.99 | 21.26 |
| 4 | 12.77 | 12.30 | 17.22 | 13.50 | 13.45 | 21.57 |
| 5 | 14.69 | 14.40 | 17.65 | 15.59 | 14.95 | 22.34 |
| – | 22.39 | 21.98 | 26.25 | 17.95 | 17.44 | 21.31 |

Fonctions sin et cos, exposant –6

| | sin x | | | cos x | | |
|----|---------|-------|-------|---------|-------|-------|
| –c | – | –1=3 | –w | – | –1=3 | –w |
| 0 | 16.16 | 15.68 | 16.21 | 15.72 | 15.51 | 19.10 |
| 1 | 10.36 | 10.12 | 9.79 | 11.01 | 10.61 | 10.74 |
| 2 | 10.03 | 9.64 | 9.52 | 10.80 | 10.31 | 10.66 |
| 3 | 9.83 | 9.47 | 9.33 | 10.47 | 10.15 | 10.58 |
| 4 | 9.80 | 9.41 | 9.25 | 10.51 | 10.31 | 10.29 |
| 5 | 9.68 | 9.38 | 9.30 | 10.91 | 10.56 | 10.72 |
| – | 316.4 | 316.0 | 369.9 | 162.3 | 162.1 | 188.6 |

Fonction exp, exposant 2

| -c | — | -l=3 | -w |
|----|-------|-------|-------|
| 0 | 43.86 | 11.52 | 11.00 |
| 1 | 40.22 | 6.41 | 5.28 |
| 2 | 39.67 | 5.61 | 4.73 |
| 3 | 39.63 | 5.45 | 4.61 |
| 4 | 39.59 | 5.50 | 4.63 |
| 5 | 39.54 | 5.60 | 4.71 |
| — | 39.00 | 4.56 | 4.26 |

Fonction exp, $x \approx \log(4)$

| | intervalle 50616 | | | intervalle 50624 | | |
|----|------------------|-------|-------|------------------|-------|-------|
| -c | — | -l=3 | -w | — | -l=3 | -w |
| 0 | 1.79 | 1.15 | 1.15 | 1.69 | 1.03 | 1.03 |
| 1 | 1.45 | 0.80 | 0.79 | 1.42 | 0.75 | 0.73 |
| 2 | 1.41 | 0.79 | 0.76 | 1.37 | 0.70 | 0.74 |
| 3 | 1.44 | 0.77 | 0.77 | 1.36 | 0.75 | 0.70 |
| 4 | 1.45 | 0.77 | 0.73 | 1.37 | 0.72 | 0.72 |
| 5 | 1.43 | 0.76 | 0.72 | 1.36 | 0.71 | 0.68 |
| — | 20.71 | 20.77 | 24.53 | 40.68 | 40.55 | 48.72 |

Fonction exp, $x \approx \log(4)$

| | intervalle 50632 | | | intervalle 50640 | | |
|----|------------------|------|-------|------------------|------|-------|
| -c | — | -l=3 | -w | — | -l=3 | -w |
| 0 | 1.14 | 0.61 | 1653 | 1.23 | 0.89 | 707.9 |
| 1 | 1.13 | 0.54 | 279.2 | 1.10 | 0.72 | 119.9 |
| 2 | 1.13 | 0.57 | 259.0 | 1.04 | 0.69 | 111.6 |
| 3 | 1.13 | 0.55 | 259.4 | 1.03 | 0.67 | 111.4 |
| 4 | 1.11 | 0.55 | 259.0 | 1.05 | 0.67 | 111.5 |
| 5 | 1.12 | 0.55 | 259.3 | 1.02 | 0.65 | 111.1 |
| — | 231 | 231 | 323 | 103 | 103 | 136.9 |

Comparaison avec SLZ (wclr22), 2^{40} points

test32f : algo de minoration d'origine (pas la variante), avec divisions, et découpage en 8 sous-intervalles si échec ($-1=3$).

| test | interv. | # bits | arrondis | lepuid | ay | marie |
|---------|-----------------|--------|----------|---------|------|-------|
| test32f | $[1/2, \dots]$ | 64 | D | 23.8 | 81.8 | 11.5 |
| test32f | $[1/2, \dots]$ | 65 | D & N | 23.5 | 80.8 | 11.4 |
| test32f | $[1, \dots]$ | 64 | D | 26.6 | 86.8 | 13.2 |
| test32f | $[1, \dots]$ | 65 | D & N | 23.9 | 77.5 | 11.7 |
| wclr22 | $[-1/2, \dots]$ | 64 | N | 26 à 28 | 111 | 12.4 |

D \rightarrow pour les arrondis dirigés ; N \rightarrow pour l'arrondi au plus près.

Machines : lepuid : Athlon ; ay : PPC G4 ; marie : Opteron (MEDICIS).